פרופ' א. ה. פרנקל

על המבנה המתמטי של הלוח העברי

(מתוך: דפים למתמטיקה ולפיסיקה לנוער המתלמד

בעריכת י. בר-הלל וי. נוימן חוברת ה' ינואר 1943 טבת תש"ג)

פרק ראשון

1) הבעיה הראשונה והעקרית אשר נגש לפתרה היא: לקבוע כמה ימים וחלקי ימים עברו מתחילת החשבון של הלוח העברי (בריאת העולם) עד סוף שנה מסוימת A. ביתר דיוק: כמה ימים עברו מ"מולד תוהו", כלומר ממולד תשרי המתאים ל- A=1 עד מולד תשרי של השנה (A+1). לשם כך עלינו לדעת מעט מאד מן הלוח העברי, דהיינו:

1) ארכו של חודש הלבנה (ה"סינודי") לפי חשבוננו שהוא

$29\frac{13753}{25920}$ יום (את המספר הזה נציין להבא, לשם קצור באות היונית μ - קרי : מו' -).

2) פילוג השנים הפשוטות (בנות 12 חודש) והמעוברות (בנות 13 חודש); ידיעתו תאפשר לנו לקבוע את מספר הימים שעברו.

באשר לנקודה השניה, הרי ידוע שבכל "מחזור קטן" של 19 שנה המתחיל בראשי השנים 1+19n (n מספר טבעי או 0), שבע השנים בנות המספרים הסדוריים 19,17,14,11,8,6,3 הנן שנים מעוברות, ושאר 12 השנים פשוטות. ארכו של מחזור שלם שוה אפוא ל-

$$19*365\frac{24311}{98496}=235\mu=(19*12+7)\mu$$ יום

(בממוצע בשנת חמה עברית יש $365\frac{24311}{98496}$ ימים). ואולם לשם ניצול מתימטי יהיה נוח יותר להביע את פילוג השנים הפשוטות והמעוברות ע"י הכלל הבא: בצאתנו מסוף השנה השמינית במחזור קטן כלשהו ובצעדנו אחורנית 18 פעם, שמונה שנים בכל צעד, תכיל כל מערכת כזו של שמונה שנים חמש שנים פשוטות ושלש שנים מעוברות (ואילו בפעם התשע עשרה – לשון אחר : בצעדנו קדימה שמונה שנים מסוף השנה השמינית שבמחזור – נקבל בתוך המערכת של שמונה שנים שש שנים פשוטות ורק שתי שנים מעוברות; הבקיאים בתורת השברים המשולבים יבינו בנקל את התופעה הזאת.)

הבה נתאר את המספר הטבעי A בצורה

$$A=8-8a+19C \qquad (1)$$

בתנאי שיהיה a או 0 או מספר טבעי קטן מ 19 (מספר המערכות הנ"ל של שמונה שנים), ו C מספר טבעי כלשהו. הרי לפננו משואה "דיופנטית" בעלת הנעלמים a ו C ; שיש לה פתרון אחד ויחיד נראה בהרחיבנו אותה ב 7, שהרי נקבל

$$7A=56-56a+7*19C=19(3-3a+7C)-1+a$$

או

$$7A+1=19(3-3a+7C)+a \qquad (2)$$

על סמך אי השיוויון $0\le a\le 18$ יהיה אפוא a השארית (הלא-שלילית הקטנה ביותר) המתקבלת כאשר נחלק 7A+1 ב 19 , ומתוך כך קובעת המשואה (1) את הערך של C באופן חד ערכי

המשואה - - - - אחר ה :

$$3-3a+7C=\frac{7A+1-a}{19} \qquad (3)$$

ועתה קל לפתור את הבעיה אשר שמנוה לנגד עינינו. שהרי אם נתאר את המספר A של השנה הנתונה בצורה (1) , נכללות בתוך 19C שנים – כלומר, ב C מחזורים – 7C שנים מעוברות, ובתוך (8-8a) השנים הנוספות עליהן (3-3a) שנים מעוברות (כי שמונה השנים הראשונות של כל מחזור מכילות 5 שנים פשוטות ו 3 מעוברות) סך הכל קבלנו (3-3a+7C) שנים מעוברות. לכן על-סמך (3), מכילות A השנים את מספר הימים

$$(12A+3-3a+7C)\mu=\left(\frac{1-a+235A}{19}\right)\mu \qquad (4)$$

אם a מסמן, כאמור לעיל, את השארית של החלוק של 7A+1 ב 19.

נחשב, בתור תרגיל, את מספר חדשי הלבנה בני n יום שיעברו מ"מולד תוהו" עד מולד תשרי התש"ד. A ישוה אפוא ל 5703, ו a לשארית החילוק של (7*5703+1) ב 19 , כלומר ל 3. (למה שוה C?) מספר החודשים שיעברו יהיה אפוא לפי (4)

$$\left(\frac{5703}{19}=300+\frac{3}{19}\right)$$

$$\frac{1-3+235*5703}{19}=235*300+\frac{235*3-3+1}{19}=70537$$

ובאמת מכילים 300 המחזורים עד סוף שנת הת"ש 235*300 שהם 70500 חודש; ושלש השנים הבאות ע ד התש"ג, ועד בכלל, מכילות (2*12+13) , שהם 37 חודש, הואיל ובין שלוש שנים אלו נמצאות שתי פשוטות ואחת מעוברת.

החשבון הזה מאפשר לנו, למשל, להפוך כל תאריך עברי לתאריך הנוצרי המתאים ; לשם פשטות נבין את התאריך הנוצרי לפי הלוח היוליאני (על שם יוליוס קיסר), הקובע את ארכה של שנת החמה ל $365\frac{1}{4}$ יום. נתאר עתה A בצורה

$$A=4s+b$$

בתנאי ש b יקבל אחד הערכים 3,2,1,0 (שאריות החלוק ב 4). הואיל וקיים

$$s=\frac{A-b}{4} ,$$

מכילות A השנים היוליאניות את מספר הימים

$$365A+\frac{A-b}{4}=365\frac{1}{4}A-\frac{b}{4}$$

השתמשנו כאן בעובדה שלפי החשבון היוליאני מתאימה שנה "מעוברת" יוליאנית, בת 366 יום, לשנה הרביעית של הלוח העברי, כלומר A=4 . לכן עודפות A השנים העבריות על השנים היוליאניות המתאימות במספר הימים

$$(\frac{1}{19}-\frac{a}{19}+12\frac{7}{19}A)\mu-(365\frac{1}{4}A-\frac{b}{4})=\frac{\mu}{19}-\frac{\mu}{19}a+\frac{1}{4}b+(12\frac{7}{19}\mu-365\frac{1}{4})A$$

הערכים הקבועים המופיעים כאן הם הנם

$$\frac{\mu}{19}=1\frac{272953}{492480}$$

$$12\frac{7}{19}\mu - 364\frac{1}{4} = -\frac{313}{98496}$$

הפרש זה מציין בכמה מדייק הלוח העברי יותר מן הלוח היוליאני בקביעת ארכה של שנת חמה. (דע כי $19 * 1080 * 24 = 492480$).

<u>תרגיל:</u>

(למתקדמים), עשה את החשבון המתאים (קשה יותר!) , אם תחת הלוח היוליאני יושם הלוח הקבוע המושלימי והפך את ההפרש ל ש נ י ם מושלימיות שלמות.

לשם כך עליך לדעת כי לפי הלוח המושלימי

א) אורך החודש (הסינודי) הוא 29 יום, 12 שעה, 44 דקה, על כן קטן מן החדש העברי

ב $\frac{1}{24*1080}$ יום.

(ב) מכילה שנה מושלימית 12 חודש והיא או "פשוטה" בת 354 יום או "שלמה" בת 355 יום.

(ג) נמצאות בכל "מחזור" בעל 30 שנה 11 שנים שלמות, והן השנים 29,26,24,21,18,15,13,10,7,5,2 והשאר פשוטות האורך הממוצע של שנה מושלימית שוה אפוא

ל $354\frac{11}{30}$ יום.

כדאי לצאת לא ממולד תוהו אלא ממולד תשרי של השנה העברית המתחילה בשנה 1 (שהיא גם השנה הראשונה של "מחזור") של חשבון המושלימים, היא השנה 4383 לבריאת העולם; ביתר דיוק: ביום ה 58 לאותה שנה, $8\frac{618}{1080}$ שעות אחרי תחילת היום.

==

פתרון התרגיל לפי צפורה בלבן (פתרו: בלבן, גולדשלק, הלוי): נצא מסוף השנה הרביעית של המחזור המושלימי ונצעד אחורנית 29 פעמים, 11 שנים כל צעד. אז תכיל כל מערכת כזו של 11 שנים 7 שנים פשוטות ו 4 שלמות.

נתאר את מספר השנים A בצורה:

$$A = 4 - 11b + 30D \qquad 0 \le b \le 29 \qquad (1)$$

D מספר טבעי כל שהוא. נפתור את (1) לפי b,D

$$11A = 44 - 121b + 11*30D$$
$$= 30(1 - 4b + 11D) + 14 - b$$
$$11A - 14 = 30(1 - 4b + 11D) - b$$

על-סמך אי-השויון $0 \le b \le 29$ יהיה $30 - b$ השארית (אי-השלילית הקטנה ביותר) המתקבלת כאשר נחלק $11A - 14$ ב 30 , ומתוך כך קובעת המשואה (1) את הערך של D באופן חד-ערכי. נקבל

$$\frac{11A - 14 + b}{30} = 1 - 4b + 11D \qquad (2)$$

לפי (1) יש ב A שנים $1 - 4b + 11D$ שנים שלמות. לפי (2) מכילות A השנים את מספר הימים

$$354A + 1 - 4b + 11D = \frac{b - 14 + (11 + 354*30)A}{30}$$

לכן ההבדל בין מספר הימים בין הלוח העברי והמושלימי הוא:

$$\left(\frac{1}{19}-\frac{a}{19}+(12+\frac{7}{19})A\right)\mu-\frac{b}{30}+\frac{14}{30}-(354+\frac{11}{30})A=$$

$$\frac{\mu}{19}+\frac{14}{30}-(\frac{\mu}{19})a-\frac{b}{30}+\left((12+\frac{7}{19})\mu-354-\frac{11}{30}\right)A=$$

$$2+\frac{10297}{492480}-\left(1+\frac{272953}{492480}\right)a-\frac{b}{30}+\left(10+\frac{433459}{492480}\right)A$$

וההבדל בשנים מושלימיות שלמות:

$$\frac{995257}{174830400}-\left(\frac{365433}{174830400}\right)a-\frac{b}{10650}+\left(\frac{5358259}{174830400}\right)A$$

פרק שני

בחלק הראשון עסקנו בשני חשבונות: חשבון הימים המוכלים ב A שנים עבריות ובחשבון הימים אשר ב A השנים היוליאניות המתאימות. מצאנו בשביל ההפרש, אחרי הגדירנו את המספרים a ו b, את הערך

$$1\frac{272953}{492480}-1\frac{272953}{492480}a+\frac{b}{4}-\frac{313}{98496}A$$

ברם כדי להשתמש בזה למעשה, עלינו, ראשית, לקבוע את נקודת המוצא (בשני הלוחות), ושנית להביא בחשבון את ה"דחיות".

מולד תוהו נקבע ל"בהר"ד", כלומר חל ביום השני של השבוע, $5\frac{204}{1080}$ שעות $(=\frac{467}{2160}$ יום) אחרי תחילת היום (שחלה בלוח העברי ב 6 שעות בערב). היום השני ההוא מתאים לפי החשבון היוליאני (המדומה) ליום 7 באוקטובר שנת 3761 לפה"ס. נעשה את חשבוננו, כפי שעשה זאת ג א ו ס , כנגד פסח במקום ראש-השנה. מכיון שיום ראשון של פסח (שנת A) קודם ליום ראשון של ראש-השנה (שנת A+1) ב 163 יום, יעמד במקום אוקטובר $7\frac{467}{2160}$ אפריל $27\frac{467}{2160}$ או מרס $58\frac{467}{2160}$ (סבת ה"סבוך" הזה תתברר מיד). על התאריך הזה נוסיף עוד $\frac{1}{4}$ יום כדי להוציא באופן אוטומטי את הדחיה "י'ח" או "מולד זקן" הדוחה ראש השנה למחרתו אם המולד חל בצהרים (שזמנם בי"ח שעות, לפי החשבון העברי) או מאוחר מזה.

על פי הדברים האלה נקבל את הבטוי

$$60\frac{10069}{492480}-1\frac{272953}{492480}a+\frac{1}{4}b-\frac{313}{98496}A\ ,$$

הואיל ו $$58\frac{467}{2160}+\frac{1}{4}+1\frac{272953}{492480}=60\frac{10069}{492480}$$

את הבטוי הזה נשים שוה ל M+m , בציינּנו את המספר הטבעי שבו ב M ואת השבר האמתי (שאפשר תמיד לצמצמו לפחות ב 19) ב m ; אז <u>ב ד ר ך כ ל ל</u> י ח ו ל ר א ש ו ן ש ל פ ס ח ב י ו ם M ב מ ר ס , או (אם M > 31) ביום (M -31) באפריל.

ואולם נשארים המקרים היוצאים מהכלל, הנקראים "דחיות", והם:

1) "לא אד"ו ראש" לכן לא בד"ו פסח; כלומר אם א' של פסח חל לפי החשבון הנ"ל באחד הימים שני, רביעי, ששי בשבת, ידחוהו למחרתו.

2) "ג"ט ר"ד בשנה פשוטה גרוש". זאת אומרת, אם A+1 תהיה שנה פשוטה, ומולד תשרי לשנת A+1 חל ביום שלישי ב $9\frac{204}{1080}$ שעות או מאוחר מזה, ידחו ר"ה – ומכיון שביום ד' אי אפשר לפי 1), ידחוהו ביומים. לאמור: אם שנת A קודמת לשנה פשוטה, וא' של פסח חל לפי חשבוננו בראשון בשבת (זהו המקרה הנדיר, בפרט לעת עתה, של ערב פסח שחל להיות בשבת!) ידחוהו ליום ג', במקרה שקיים

$$m \geq \frac{9\frac{204}{1080}+6}{29} = \frac{1367}{2160}$$

3) "בט"ו תקפ"ט אחר עבור עקור מלשרוש", זאת אומרת, אם A שנה מעוברת ומולד תשרי לשנת A+1 חל ביום שני ב $15\frac{589}{1080}$ שעות או מאוחר מזה, ידחו ר"ה למחרתו (יום שלישי). לאמור: אם A שנה מעוברת, וראשון של פסח חל לפי חשבוננו בשבת, ידחוהו ליום ראשון במקרה (הנדיר) שקיים

$$m \geq \frac{15\frac{589}{1080}+6}{24} = \frac{23269}{25920}$$

מהגדרתן זו של הדחיות נופק עלינו לקבוע עוד את י ו ם ה ש ב ו ע c שבו חל יום M במרס, כדי להכריע את תאריכו האמיתי של פסח או ראש השנה. (מובן שהצורך הזה בידיעת יום השבוע שבו חל המולד איננו תלוי בהפיכת תאריך מן הלוח העברי ללוח אחר, אלא נשאר גם בתוך הלוח העברי עצמו.)

בהתאם למה שנאמר לעיל, חל ראשון של פסח לשנת A=0 ב M=58 ובשבת (c=0) ; כלומר, קיים כנגד A=0

$$c \equiv M + 5(\mathrm{mod}\,ulo\ 7)$$

(נשתמש כאן לשם פשטות, בסמון הרגיל של קונגרואנציה, ובסימנה ≡. הקונגרואנציה $a \equiv b(\mathrm{mod}.\ m)$ רוצה לומר : (a-b) מתחלק ב m.)

מאידך, A השנים היוליאניות מיום M במרס לשנת 0 עד יום M במרס לשנת A מכילות כאמור בפרק הראשון,

$$365A + \frac{A-b}{4} \equiv 3A + 5b(\mathrm{mod}.\ 7)$$ יום.

(זכור שהמספר $\frac{A-b}{4}$ הנו שלם!). <u>לכן יהיה ערכו של c בשנת A שארית החילוק של (M+3A+5b+5) ב 7.</u>

כדי לנסח בפשטות את הדחיות, נעמוד על כך כי מתחילת המאמר נובע בנקל: A היא שנה מעוברת אם a<7 , שנה פשוטה אם a>6, לכן תהיה A+1 שנה פשוטה אם שארית החלוק של (a+7*1) ב 19 גדולה מ 6, כלומר אם a<12 , המסקנה הסופית תהיה אפוא:

הראשון של פסח לשנת A חל בדרך כלל ביום M במרס (או M-31 באפריל). יוצאים מן הכלל שלשת המקרים הבאים:

1) אם c שוה לאחד הערכים 6,4,2, יחול פסח ביום (M+1) במרס.

2) אם c=1, a<12, $m \geq \frac{1367}{2160}$ יחול פסח ביום (M+2) במרס.

3)) אם c=0, a<7, $m \geq \frac{23269}{25920}$ יחול פסח ביום (M+1) במרס.

כל התאריכים האלה הם יוליאניים; כדי לקבל את התאריך הגריגוריאני, שהוא הלוח הנהוג עתה כמעט בכל הארצות הנוצריות, צריכים להוסיף גודל קבוע (ההפרש בין שני הלוחות), השווה ל 13 בשנים 1900 עד 2099 והשווה בדרך כלל $S-\left[\frac{S}{4}\right]-2$ ($[a]$ פירושו: המספר השלם הגדול ביותר הקטן מ a או שווה לו)

אם S הוא המספר "המאי" הנוצרי $\left[\frac{A-3760}{100}\right]$.

התאור והחשבונות הנ"ל מבוססים על הנוסחה שנתן ג א ו ס בשנת 1802; וכן על שנוי בנוסחה זו אשר נתן מחבר המאמר הזה בשנת 1910 ועל ההוכחה לנוסחת גאוס שנתן ה מ ב ו ר ג ר בשנת 1896.

<u>תרגילים:</u>

א) מלחמת העולם הראשונה פרצה בתשעה באב התרע"ד. לאיזה תאריך גריגוריאני מתאים זה?

ב) מהי האומדנה (הסתברות; כלומר היחס בין מספר המקרים החיוביים ומספר כ ל המקרים האפשריים) לכך ש ע ר ב פ ס ח יחול בשבת (תופעה שיש בה לעת עתה הפסקה של 20 שנה, מתר"ץ עד תש"י)? ומהי האומדנה לכך שראשון של פסח יחול ביום ג', או ביום ה', או בשבת? (כל דבר לחוד.)

ג) אחרי עבור כמה שנים ישוב סדר קביעות השנים העבריות, דהיינו התאריכים בתוך השבוע, בדיוק לסדר הראשון? (לאמור, מהו המחזור השלם ללוח העברי?)

פרופ' א. ה. פרנקל

נוסחה המקשרת את הלוח העברי בלוח המושלימי

בהרחיבנו את התרגיל שב"דפים" האלה מטבת תש"ג (חוברת ה' עמ' 2), נשאל מתי חל תאריך עברי מסוים לפי הלוח (הקבוע) של המושלימים (כידוע יש ארצות שבהן מקדשים המושלימים את החדש "על-פי הראייה". תפקיד מתימטי מתעורר, כמובן, רק ביחס ללוח קבוע.)

כתאריך עברי נקח, לפי <u>גאוס</u> , ראשון של פסח (ט"ו בניסן) לשנת A, החל תמיד 163 יום לפני א' של ראש השנה (A+1). באשר ללוח העברי, נסתמך על המסקנה שאליה הגענו במקום הנ"ל, עמ' 2 למעלה (נוסחה (4));

כאשר ללוח המושלימי, נשתמש במה שהוגד שם (באותו עמוד למטה) על ארגונו. – בחירת פסח במקום ר"ה מסלק גם את הקושי להבחין בין סוף חדש ובין ראשית החדש הבא.

כדי לקבוע את מספר הימים שבהם עולות B שנים עבריות על השנים המושלימיות המתאימות, נצא מן הפסח של שנה 0 לספירת המושלימים (ל0 ה"מ), כלומר מן הפסח שקדם לתאריך ההג'רה (א' במוחרם שנה 1, החל לדעת רוב הכרונולוגים ב 16.7.622 לפי הלוח היוליאני). השנה ההיא היא ד' אלפים שפ"ב לבריאת העולם; לכן נותן האפרש $A-4382$ את מספר השנים העבריות שבין הפסח הנ"ל ובין הפסח לשנת A נשים

$$B = A - 4382 \qquad (1)$$

הואיל והיתה שנת 4382 השנה השתים-עשרה למחזור הלבנה (בת 19 שנה), נתאר B בצורה

$$B = -4 - 8a + 19C \qquad (0 \le a < 19) \qquad (2)$$

על סמך היחס $7B+9 = 19*(-1-3a+7C)+a$ יתקבל a כשארית (הקטנה הלא-שלילית) מתוך החלוק של $7B+9$ ב 19. מן השויון האחרון נופק:

(3) $$-1-3a+7C=\frac{(7B+9-a)}{19}$$

הערה: ב (2) מופיע מימין באיבר הקבוע -4 (ולא 8 כבמקום הנ"ל), מכיון שאין אנחנו יוצאים מהתחלת המחזור (שם משנת 0 העברית) אלא מסוףהשנה ה 12 שבמחזור; כדי להגיע אל סוף השנה 8 שבמחזור (עיין שם) עלינו אפוא לצעוד אחורנית 4 שנים.

הואיל ובין השנים 9, 10, 11, 12 של המחזור יש שנה מעוברת אחת (11), נמצא לפי מה שלמדנו במקום הנ"ל, כי $B=-4-8a+19C$ שנים עבריות, המתחילות בסוף השנה ה12 של מחזור כלשהו, מקיפות $(-1+3a+7C)$ שנים מעוברות, ולכן עלפי הנוסחה (3), סך הכל מספר ימים השווה (עיין שם) ל $(12B-1-3a+7C)\mu=\left(\frac{9-a+235B}{19}\right)\mu$ (μ מסמן, כמו במקום הנ"ל, את אורך החדש העברי (בימים ובחלקי ימים), דהיינו $\mu=29.5+\frac{793}{25920}$).

מאידך, מספר הימים אשר בB שנים מושלימיות ממוצעות (עיין שם) שוה ל $B*\left(354\frac{11}{30}\right)$ נסמן $\left(\frac{235}{19}\right)*\mu$ ב δ , $354\frac{11}{30}$ ב ε אז יהיה ההפרש בימים בין B השנים העבריות ו B שנים מושלימיות מראשית החשבון המושלימי $\frac{9\mu}{19}-\frac{\mu}{19}a+(\delta-\varepsilon)*B$

אם רוצים למנוע <u>חיסור</u> של ערך לא קבוע, אפשר לסמן $(18-a)$ ב a''' כך שהביטוי יעבור ל

$$-\frac{9\mu}{19}-\frac{\mu}{19}a'''+(\delta-\varepsilon)*B$$

והנה חל מולד תשרי לשנת דשפ"ג ביום ה 58 לשנת 1 לסה"מ, $8+\frac{618}{1080}$ שעות אחרי תחילת היום לפי החשבון העברי (כלומר, בשעה השלישית אחרי חצי הלילה). זהו המוצא שעליו ישען חשבוננו. כדי לקבל מייד את החשבון לפסח (במקום ר"ה) , נקרא לרגע, הקודם למולד תשרי שנת (A+1) ב 163 יום, בשם "ירח פסח" לשנת A. ירח פסח דשפ"ב חל אפוא בתאריך $58+\frac{1}{3}+\frac{618}{25920}-163+354+\frac{11}{30}=249.7238426$ של השנה 0 (שנה ממוצעת חשבונית) לסה"מ.

<u>נגדיל</u> ערך זה בשש שעות, כלומר ב 0.25, כדי להוציא את הדחיה "מולד זקן" וכפי שעשה זאת גאוס בנוסחתו, מאידך <u>נקטין</u> אותו ב 0.5 מטעם שנזכירנו להלן. לפי זה נקבל כתאריכי ירח הפסח לשנת A, אם נכניס את ערכי הקבועים $\eta,\delta,\varepsilon,$ $253.4856664+1.5542418*a'''+10.880155539*B$ (4)

בשנה <u>הממוצעת</u> B לסה"מ.

בגדול B ילך ויגדל הביטוי הזה בקצב מהיר למדי, בהתאם לעובדה כי השנה העברית הממוצעת ארוכה ב11 יום כמעט מן השנה המושלימית הממוצעת (שאיננה קשורה בשמש כל עיקר). לכן יחול אותו פסח לא בשנת B אלא בשנה מאוחרת ממנה לסה"מ. ביתר דיוק: אם הבטוי (4) גדול מD שנים מושלימיות וקטן מ D+1 שנים, יחול

הפסח הנידון בשנת E=B+D לסה"מ. הואיל והשנה המושלימית הממוצעת שוה ל $\varepsilon = \dfrac{10631}{30}$ ישוה D למספר

השלם

(השכן) שאיננו גדול מן המנה;

$$\frac{7064.569992 + 46.627254 * a''' + 326.40466617 * B}{10631}$$

ואילו את ה"שארית" המתקבלת בחילוק זה נסמן ב d. $\dfrac{d}{30}$ מציין אפוא את התאריך של ירח הפסח לשנת A בשנה

המושלימית E, בהתיחסו אל השנה המושלימית <u>הממוצעת.</u>

באשר למעבר אל השנה המושלימית הממשית (ה"אזרחית"), נסמן בp את העודף (בימים) של השנה הממוצעת על האזרחית. p הוא מספר חיובי או שלילי או 0, ובפרט p=0 בתחילת כל מחזור בן 30 שנה, כגון בתחילת הספירה; כל שנה "פשוטה" מגדילה את p ב $\dfrac{11}{30}$, כל שנה "מלאה" מקטינה את p ב $\dfrac{19}{30}$. הכלל לפילוג השנים המלאות בתוך המחזור (עיין במקום הנ"ל) מראה כי "מעברים" את השנה (לאמור: מוסיפים יום) אם אחרת היו מקבלים $p \geq \dfrac{1}{2}$ בראשית השנה הבאה. אם נשים $b = 30p + 15$, נקבל : $0 \leq b \leq 30$. בראשית כל מחזור . b=15

יסמן η את מספר השנים הפשוטות ו ϑ את מספר השנים המלאות שעברו עד ראש השנה E כנגד אותו זמן יהיה

אפוא $b = 15 + 11\eta - 19\vartheta, \quad b \equiv 15 + 11(\eta + \vartheta) \quad (\text{mod}.\, 30)$ (5)

מזה נופק, הואיל וקים $\eta + \vartheta = E - 1$ b היא שארית (הלא שלילית הקטנה ביותר) שבחילוק של $\dfrac{11E + 4}{30}$

.

על-פי הדברים האלה נקבל את התאריך של ירח הפסח לשנת A בשנה המושלימית <u>האזרחית</u> E, בחברנו $p = \dfrac{b}{30} - \dfrac{1}{2}$ אל התאריך של השנה הממוצעת. ברם $\dfrac{1}{2}$ חיסרנו לעיל בחשבנו את d, לכן נשים $\dfrac{b + d}{30} = N + n$ כך ש N מספר שלם ו n שבר אמיתי לא-שלילי, ונקבל כתאריך המושלימי של ירח פסח לשנת A את יום N לשנת E והזמן המדויק ביום ינתן על ידי n .

n נחוץ רק בקשר עם <u>הדחיות</u> (עיין הדפים האלה, אדר תש"ג, חוברת ו', עמ' 5).אם נסמן ב s את יום השבוע המתאים ליום N של השנה המושלימית E, נמצא, בהתחשב עם זה שהיום 0 לשנת E=0 חל ביום חמישי:

$$s \equiv N + 4\eta + 5\vartheta + 5 \equiv N + 6E + 5\eta + 6\vartheta + 6 \ (\text{mod}.7)$$

מאידך נופק מ (5)

$$3b - 45 = 33\eta - 57\vartheta \equiv 5\eta + 6\vartheta \equiv 3b + 4 \ (\text{mod}.7)$$

בהכניסנו ערך זה בשביל $5\eta + 6\vartheta$ לתוך הקונגרואנציות הקודמות, נקבל:

s היא השארית שבחילוק $\dfrac{N + 6E + 3b + 3}{7}$.

באשר להנהגת הדחיות אד"ו, ג"ט ר"ד, בט"ו תקפ"ט על סמך יום השבוע s (ולכן יום השבוע s+2 לראש השנה A+1) וזמן המולד n , עיין מה שנאמר בחוברת של אדר תש"ג. כן קל להפוך את היום N בשנה המושלימית

לחדשים וימי החדש. קשיים בקשר עם התחלת שנה או סופה לא יוכלו להופיע מכיון שפסח חל באמצע החדש. (אילו היו ממשיכים ללא סייג את הלוח הקבוע של המושלמים, היה מתעורר קושי כזה; כי החדש המושלמי שיצאנו ממנו קצר בשלש שניות בערך מן החדש העברי - המתלכד למעשה עם החדש הסינודי האמיתי – ולכן היה ראש החדש המושלמי לפי החשבון חל באמצע החדש אחרי עבור שלשים אלף שנה בערך.)

המסקנה הסופית היא:

סמן A-4382 בB, את השארית של $\frac{7B+9}{19}$ ב a, ואת 18-a ב a''' שים

$$\frac{7064.569992+46.627254*a'''+326.40466617*B}{10631}=D+d$$

(D שלם). סמן B+D ב E , את השארית של $\frac{11E+4}{30}$ ב b , ואת $\frac{b+d}{30}$ ב N+n (N שלם) .

אז "בדרך כלל" חל א' של פסח לשנת A ביום ה N של השנה המושלמית E.

כדי לשים לב גם לדחיות, יש להביא בחשבון כי ביום השבוע המתאים לאותו ראשון של פסח ינתן על ידי שארית החילוק $\frac{N+6E+3b+3}{7}$, וכי הזמן המדויק של ירח הפסח, דהינו מולד תשרי (A+1) , נקבע על ידי n.

תרגילים:

1) מצא נוסחה מקבילה (פשוטה הרבה יותר) ההופכת תאריכים נוצריים (של הלוח הלוליאני) לתאריך המושלמי המתאים!

2) תן נוסחה (פשוטה מאד) הקובעת בערך את התאריך המושלמי לפסח שנת A, כלומר את החודש המושלמי אשר סמוך לאמצעו יחול הפסח הנידרש!

=:=:=:=:=:=:=:=

הערת המלבה"ד: (ר"ח מר-חשון תשס"ד) מסמך זה נכתב עלפי העתק מצולם של המאמר המקורי. ההעתק הנ"ל באיכות ירודה ויתכן ונפלו שגיאות במהלך הכתיבה על כן אודה לכל מי שימצא תיקונים וישלח לפי הכתובת:

אהוד בר סיני, שד' בן ציון 17 ת"א 64286